REVISTA INNOVAR JOURNAL

La sensibilidad de los parámetros en el mercado potencial y actual de una organización

Francisco Javier Landa Bercebal
Ph.D. en Economía
Universidad de Sevilla
Sevilla, España
Organización y Marketing
Correo electrónico: jlanda@us.es

Francisco Velasco Morente
Ph.D. en Matemáticas
Universidad de Sevilla
Sevilla, España
Métodos Cualitativos y Optimización en Sistemas Dinámicos Económicos
Correo electrónico: velasco@us.es

Luis González Abril
Ph.D. en Economía
Universidad de Sevilla
Sevilla, España
Métodos Cualitativos y Optimización en Sistemas Dinámicos Económicos
Correo electrónico: luisgon@us.es

PARAMETERS SENSITIVITY IN THE CURRENT AND POTENTIAL MARKETS OF AN ORGANIZATION

ABSTRACT: The market system composed of the surrounding business setting, competing organizations and consumers/buyers, keep a permanent interaction that becomes concrete in a dynamic path. If the market is divided into current market and potential market, the exchange of roles between consumers/buyers, or simply the incorporation of any organization to the current market, involves a dynamic process that depends on variables that are exogenous to the system and the value of adjustment parameters. Such process origins in the behavior of the individuals part of the system under study. The sensitivity and the study of those parameter values require the knowledge of the system's possible trend, as well as its behavior, depending on the parametric region where they are.

KEYWORDS: Current and potential market, dynamic system, Hopf bifurcations.

LA SENSIBILITÉ DES PARAMÈTRES DANS LE MARCHÉ POTENTIEL ET ACTUEL D'UNE ORGANISATION

RÉSUMÉ : Dans le système du marché, composé par l'environnement, les organisations en concurrence et les consommateurs/acheteurs, il s'opère une interaction permanente qui assume une trajectoire dynamique. Si le marché est divisé en marché actuel et potentiel, le passage des consommateurs/acheteurs de l'un vers l'autre, ou simplement l'entrée au marché actuel d'une organisation quelconque, supposent également un processus dynamique qui dépend de variables exogènes au système et de la valeur des paramètres de réglage, dont l'origine est dans le mode de comportement des individus qui composent le système étudié. La sensibilité et l'étude de ces valeurs des paramètres réclament que l'on connaisse la tendance possible du système ainsi que son comportement, selon la région paramétrique où il se trouve.

MOTS-CLÉS : Marché actuel et potentiel, système dynamique, bifurcations de Hopf.

A SENSIBILIDADE DOS PARÂMETROS NO MERCADO POTENCIAL E ATUAL DE UMA ORGANIZAÇÃO

RESUMO: O sistema do mercado composto pelo ambiente, as organizações em concorrência e os consumidores/compradores realizam uma interação permanente que se concreta em uma trajetória dinâmica. Se o mercado é dividido em mercado atual e mercado potencial, a mudança dos consumidores/compradores de um ao outro ou simplesmente a entrada ao mercado atual de qualquer organização, supõe também um processo dinâmico que depende de variáveis exógenas ao sistema e do valor dos parâmetros de ajuste cuja origem está na maneira de comportamento dos indivíduos que compõem o sistema estudado. A sensibilidade e o estudo desses valores dos parâmetros requerem conhecer a possível tendência do sistema, assim como o comportamento deste dependendo da região paramétrica na qual se encontre.

PALAVRAS-CHAVE: Mercado atual e potencial, sistema dinâmico, bifurcações de Hopf.

RESUMEN: El sistema del mercado compuesto por el entorno, las organizaciones en competencia y los consumidores/compradores realizan una interacción permanente que se concreta en una trayectoria dinámica. Si el mercado se divide en mercado actual y mercado potencial, el cambio de los consumidores/compradores del uno al otro o simplemente la entrada al mercado actual de una organización cualquiera suponen también un proceso dinámico que depende de variables exógenas al sistema y del valor de los parámetros de ajuste, cuyo origen está en la manera de comportamiento de los individuos que componen el sistema estudiado. La sensibilidad y el estudio de esos valores de los parámetros requieren conocer la posible tendencia del sistema, así como el comportamiento del mismo, dependiendo de la región paramétrica en la que se encuentre.

PALABRAS CLAVE: Mercado actual y potencial, sistema dinámico, bifurcaciones de Hopf.

Introducción

La facilidad en la comunicación de la información que tienen las actuales organizaciones, así como la posibilidad de que las mismas actúen en cualquier punto de la geografía terrestre, en un tiempo que podemos entender como muy corto -al menos si lo comparamos con lo que ocurría no más atrás de diez años-, ha incidido notablemente en un mejor cumplimiento del tercer principio sobre eficacia en la segmentación del mercado. La accesibilidad a un segmento de mercado determinado no supone en la actualidad un problema de difícil solución. Este hecho ha permitido dinamizar los aspectos competitivos de las organizaciones que actúan en los mercados y que están encuadradas en un mismo mercado de referencia.

CORRESPONDENCIA: Francisco Velasco Morente. Universidad de Sevilla. Departamento de Economía Aplicada I. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Avda. Ramón y Cajal, 1. Sevilla 41018, España.

CITACIÓN: Landa Bercebal, F. J., Velasco Morente, F., & González Abril, L. (2015). La sensibilidad de los parámetros en el mercado potencial y actual de una organización. *Innovar, 25*(57), 107-120. doi: 10.15446/innovar.v25n57.50355.

ENLACE DOI: http://dx.doi.org/10.15446/innovar.v25n57.50355.

CLASIFICACIÓN JEL: M31, C02, C61.

RECIBIDO: Julio 2011, APROBADO: Noviembre 2013.

Ese mayor dinamismo entre las organizaciones y su relación de intercambio con el mercado suponen, a su vez, que los compradores o en su caso consumidores puedan acceder de manera más fácil al conocimiento de los productos y/o servicios en competencia, lo que a su vez indica abrir la posibilidad, más que probable, de cambios de fidelidad por parte de los mismos.

Las estrategias en el esfuerzo de marketing[1] se fundamentan, en lo referente a la comunicación ya sea personal o de masas, en resaltar los atributos que hacen que el consumidor aprecie, de una manera clara y contundente, cómo los mismos producen en su conjunto utilidad o beneficio. Estamos en el momento en el que la fidelización a un producto, servicio u organización depende más que nunca de comportamientos competitivos anticipativos y agresivos en muchos casos.

Por tanto, uno de los problemas fundamentales con los que se puede encontrar una organización en competencia es el de prever bajo qué condiciones puede perder o, en su caso, ganar clientes: perder clientes, porque pasan a engrosar el conjunto de clientes de sus competidores o simplemente dejan de reunir las condiciones que permitan calificarlos como tales (en cualquier caso dejarían de ser clientes actuales de la organización para pasar a la situación de clientes potenciales); o ganar clientes, porque se produzca el efecto contrario. Es en definitiva un juego de suma nula, en el que el adversario no es solo el competidor, sino el propio mercado potencial del sector en el que se desenvuelve la organización.

La teoría del dinamismo aplicada al comportamiento nos permite estudiar y analizar ese movimiento entre la condición de cliente actual y cliente potencial. La trayectoria en el tiempo que refleja la evolución de ambos tipos de clientes y su cambio de rol puede analizarse estudiando las bifurcaciones del modelo dinámico, ya que estas reflejan un cambio en el comportamiento de los elementos estudiados. El análisis de las variables independientes pero controladas por la organización y la sensibilidad de los valores paramétricos que recogen la tendencia en los cambios del comportamiento permiten visualizar, ex ante, los posibles movimientos en el sistema y su previsible tendencia.

Podemos ver en Gandolfo (1997), Lorenz (1997), Vílchez, Velasco y García del Hoyo (2002), Velasco, Begines, Nadal, Chamizo y Vílchez (2002), Vílchez, Velasco, González y Ortega (2003), Landa y Velasco (2004), Vílchez, Velasco y Herrero (2004), Bosi, Magris y Venditti (2005), Haunschmied, Feichtinger, Hartl y Kort (2005), He y Westerhoff (2005), Li (2005), Wagener (2005), Zhang (2006), Magnitskii y Siderov (2006), Velasco, Nadal, González y Vílchez (2007), Velasco, Nadal, González-Abril y Ortega (2009), entre otros, ejemplos en los que se estudian bifurcaciones en estos modelos, en los que surgen ciclos límite que acaban perdiendo su estabilidad y que en algunos casos describen comportamientos de duplicación del periodo como antesala a la obtención de atractores caóticos. Es importante, por tanto, conocer la estabilidad o inestabilidad de los ciclos que pueden aparecer en nuestro modelo. Es por ello que vamos a analizar bajo qué condiciones el comportamiento del modelo puede ser cualitativamente muy diferente en un entorno del punto fijo, si se realizan pequeñas variaciones en los parámetros del mismo (Landa y Velasco, 2004; Velasco *et al.*, 2007; Velasco *et al.*, 2009).

El resto del artículo está estructurado como sigue: en la sección segunda, se presenta el modelo en tiempo continuo propuesto por Feichtinger (1992) y ampliado por Landa y Velasco (2004); en la sección tercera, obtenemos el único equilibrio del sistema, estudiando la naturaleza del mismo; en la sección cuarta y quinta, se estudian los diferentes comportamientos producidos por las bifurcaciones obtenidas en el sistema. Hemos de hacer notar que todo el trabajo se ha realizado de forma simbólica, con lo que el mismo hace que se pueda particularizar para conjuntos de valores de los parámetros del modelo. En este caso hemos estudiado uno de los parámetros, indicando cómo se puede hacer para el resto. Se finaliza con una sección de conclusiones.

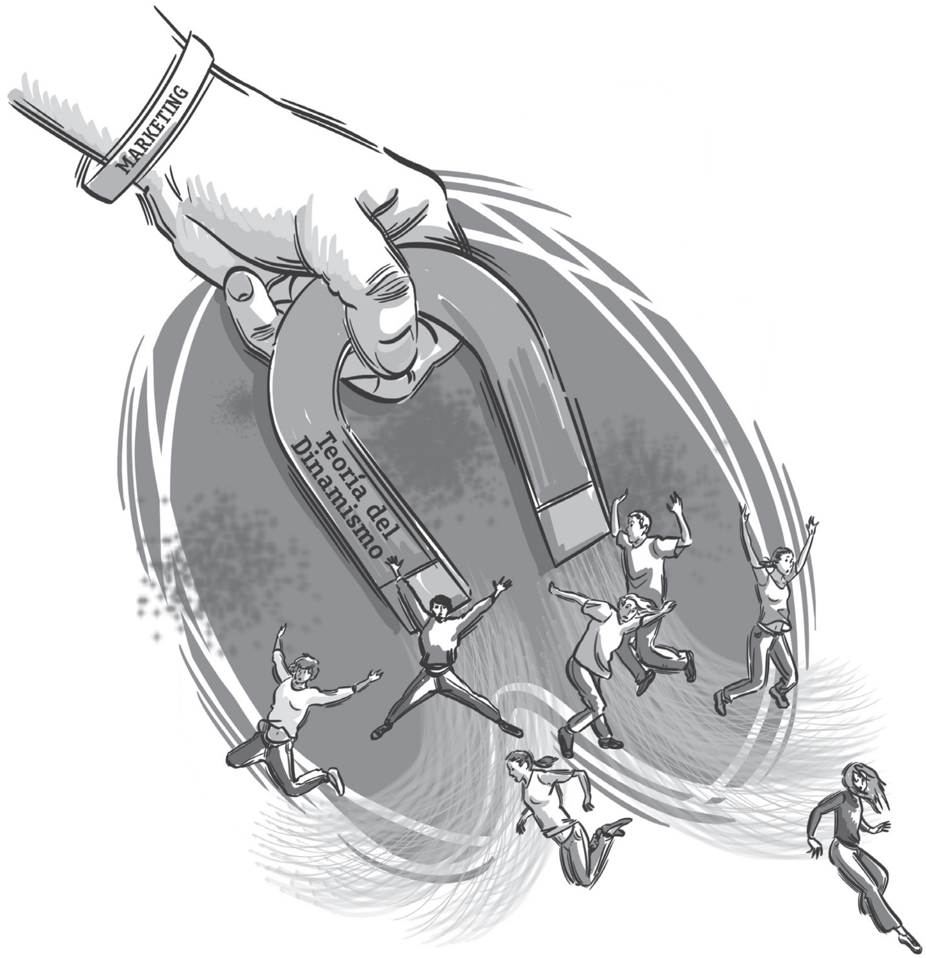
Modelo dinámico continuo del mercado actual y potencial de una organización

En Landa y Velasco (2004), ya se realizaba un estudio del comportamiento de traspaso entre el mercado potencial y actual. El modelo dinámico expuesto en este trabajo se diferencia de aquel y se concreta de la forma siguiente:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = k - \alpha\, x(t)\, y(t) + \beta\, y(t) - c\, y(t) \\ \dot{y}(t) = \alpha\, x(t)\, y(t) - \delta\, y(t) + c\, y(t) \end{cases} \tag{1}$$

Aquí exponemos de manera más precisa la propia dinámica de funcionamiento, que va a permitir seguir una línea de actuación que finalice en el estudio de la sensibilidad de los valores paramétricos y de sus correspondientes bifurcaciones; este es, en definitiva, el objetivo fundamental de este trabajo, así como exponer que estos valores son los que reflejan los cambios en el comportamiento de los elementos o sujetos integrantes del

[1] "Esfuerzo de Marketing: La cantidad de inversión o en su caso gasto que una organización realiza para incrementar su demanda de producto o servicio" (Kotler, 1992, pp. 81-82).



segmento de mercado, en su papel de clientes potenciales[2] de una organización o en su papel de clientes actuales de la misma.

Las dos ecuaciones que definen el comportamiento del sistema dinámico -podemos decir- son componentes de un juego de suma nula, de manera que las variaciones en positivo de una de ellas se produce inevitablemente por la variación en el sentido contrario de la otra.

De esa manera, la variación de la trayectoria[3] de los denominados clientes potenciales de una organización $\dot{x}(t)$ va a depender:

a) De la entrada neta[4] en el sistema de aquellas personas que puedan ser calificadas como clientes potenciales de todo el sector, y que en momentos anteriores del tiempo no podían ser consideradas ni como clientes potenciales[5]. Esa entrada neta en el sistema se mide por el parámetro k, que esta expresado como una tasa;

b) del número de compradores que en este momento son compradores actuales de organizaciones competidoras[6]

[2] El cliente potencial de una organización lo definimos como aquel elemento integrante del mercado potencial actual del sector que se trate, más aquel que es cliente actual de otra u otras organizaciones competidoras y por tanto es un cliente a captar o potencial de la organización que se trate (Armstrong *et al*., 2011).

[3] La trayectoria queda definida por la variación que se produce en el número de elementos de los denominados clientes potenciales de la organización que se trate. Esa variación puede ser por incremento o por decremento y medida en tantos por uno.

[4] La entrada neta de clientes potenciales al sector puede ser positiva o negativa. Será positiva si se incorporan al mercado potencial actual del sector más elementos de los que salen. Si la tendencia en la trayectoria de K es positiva, implica que el mercado potencial teórico del sector será mayor que el potencial actual. Si la tendencia en la trayectoria es negativa, el mercado potencial teórico del sector será menor que el potencial actual.

[5] Piénsese, por ejemplo, en individuos con escasa renta que en un momento determinado del tiempo, mejoran sus niveles de renta. Estos podrían ser considerados a partir de ese instante como individuos que cumplen con la condición necesaria para poder calificarles como clientes potenciales.

[6] "Organización competidora: aquella que dedicándose a establecer relaciones de mercado con clientes actuales considera a otra organización como rival en ese objetivo de la relación de mercado" (Kotler, 1992, p. 141).

y, por tanto, pueden ser considerados como compradores potenciales de la organización $x(t)$; del número de compradores actuales de la organización $y(t)$. Tanto $x(t)$ como $y(t)$, están expresados en tanto por uno. El producto de ambos es la varianza de la proporción de los elementos considerados como clientes actuales, que está afectada por lo que denominamos tasa de contacto $\alpha(t)$ entre clientes, los representados por $x(t)$ y los representados por $y(t)$. La variación de la tasa de contacto estará contenida en el intervalo [0,1], de tal manera que el valor 0 determina que no existe contacto y el valor 1 implica contacto del total de ambos tipos de clientes. Si los clientes actuales de la organización tienen más poder de convicción que los actuales de otras organizaciones competidoras, puede haber una traslación de clientes de estas a aquella, pero ello no tiene por qué afectar necesariamente al valor de la varianza, siempre y cuando los cambios en la proporción sean equivalentes. Habría un cambio cualitativo[7] pero no necesariamente cuantitativo, si se cumple que $|x(t)-y(t)|=h$, siendo en este caso h un valor constante y dada la propiedad conmutativa del producto. En este caso, tan solo se produciría un cambio cuantitativo significativo en la varianza cuando, partiendo de una diferencia entre los valores $x(t)$ e $y(t)$, el poder de convicción de unos fuera tal que llevara al sistema a que ambos valores $x(t)$ e $y(t)$ variaran, de tal forma que $|x(t)-y(t)|=h$ para $0 \leq h \leq 1$, pudiéndose dar también el caso contrario. Si el poder de atracción de los clientes actuales de otras organizaciones competidoras $x(t)$ es mayor que el de clientes actuales de la organización $y(t)$, entonces el signo que afecta a la función es positivo y no negativo, esto es, la trayectoria de los clientes potenciales de la organización $\dot{x}(t)$ presenta variaciones positivas;

c) de la salida de clientes actuales de la organización $\beta\, y(t)$, que pasan a formar parte de los clientes actuales de las organizaciones competidoras. Por ello, pasan a engrosar el considerado como mercado potencial de la organización. Esta salida de clientes actuales se debe fundamentalmente a un esfuerzo de marketing de las organizaciones competidoras muy eficaz;

d) del esfuerzo de marketing de la organización $c\, y(t)$, de tal manera que un esfuerzo eficaz contribuye necesariamente a reducir los clientes potenciales, ya que son atraídos al mercado actual de la organización. Por ello, este elemento va afectado del signo negativo; no obstante, si la política de esfuerzo de marketing de la organización fuera nefasta, entonces este conseguiría un objetivo diferente al que habitualmente se le reconoce: la captación de clientes. Un esfuerzo de marketing mal enfocado produce la repulsión de clientes actuales, que pasarían a formar parte del mercado potencial, ya sea clientes de otras organizaciones competidoras, o como integrantes del mercado potencial de todo el sector. En este caso, el signo que afecta a $c\, y(t)$ podría ser positivo.

En definitiva los signos que acompañan a los elementos que definen la trayectoria de los clientes potenciales son tal y como aparecen en el modelo, salvo casos excepcionales debidos fundamentalmente a los esfuerzos de marketing de la propia organización y en su caso de las organizaciones competidoras, así como al poder de persuasión que se produce entre los clientes del producto-mercado de todas las organizaciones competidoras.

De igual manera que hemos definido el comportamiento, en su devenir temporal, de los clientes potenciales de la organización, lo podemos hacer con la evolución temporal o trayectoria de los clientes actuales de la organización, definidos en el sistema de ecuaciones y con la que el modelo se completa:

La variación de la trayectoria $\dot{y}(t)$ dependerá:

a) Del producto $\alpha(t)\, x(t)\, y(t)$, cuyo funcionamiento ha sido tratado como parte de la ecuación anterior. Como en esta ecuación se está definiendo la trayectoria en la variación de los clientes actuales, entonces el signo de este producto será contrario al que se planteaba en la ecuación que definía la trayectoria de los clientes potenciales $\dot{x}(t)$;

b) del esfuerzo de marketing de la organización $c\, y(t)$, que actuará positivamente siempre y cuando sea eficaz, y negativamente en el caso de que manifieste ineficacia;

c) de $\delta\, y(t)$; este término recoge las disminuciones que se producen en la trayectoria de los clientes actuales de la organización debido a la desaparición natural de las personas, representado por ε y $\beta\, y(t)$ que se definía al tratar la anterior ecuación del sistema y que supone la entrada de clientes a organizaciones competidoras de la organización que estemos tratando, siendo $\delta = \beta + \varepsilon$. Este término siempre irá acompañado del signo negativo, ya que la existencia de los dos componentes del mismo, ε y $\beta\, y(t)$, suponen necesariamente salidas del mercado actual de la organización.

[7] El cambio cualitativo se produce en el momento que un consumidor deja de serlo y pasa a formar parte del mercado potencial o al contrario. Eso no es más que un cambio de actitud y por ello de cualidad o cualitativo.

Por esta razón, el comportamiento del sistema representado por ambas ecuaciones que definen la trayectoria temporal de las variaciones que se producen entre mercado actual y mercado potencial de una organización es complementario. No se trata de dos sistemas sino de dos enfoques dentro del mismo sistema. Los signos son convencionales, dependiendo la adición o la detracción de aspectos cualitativos como la eficiencia en la comunicación, las consecuencias del contacto entre personas del segmento en su papel de compradores potenciales de la organización o de clientes actuales de la misma.

Lo que se plantea, una vez definido el modelo de comportamiento del sistema, es: a) se pueden prever los cambios de comportamiento del sistema, b) cómo se reflejarían en el modelo los cambios de comportamiento, en caso de que sean previsibles.

Equilibrio estable e inestable del mercado actual y potencial

A la contestación de las dos cuestiones que planteamos al final del epígrafe anterior, responde el resto del artículo. Los cambios de comportamiento del sistema se van a poder prever realizando el estudio de las bifurcaciones, esto es, con la detección del cambio cualitativo del modelo. Este cambio cualitativo va a significar un cambio de tendencia en la trayectoria de la variación en el mercado potencial actual y en el mercado actual de la organización, ya que ambos elementos definen las dos variables dependientes del sistema de ecuaciones definido.

Por otra parte, para que existan bifurcaciones, ha de producirse una variación en los parámetros de ajuste del sistema. Estos parámetros de ajuste son valores que recogen los efectos cualitativos o de comportamiento de las personas que están integradas en el segmento, ya sea porque pertenezcan al mercado potencial actual, o porque lo hagan al mercado actual de la organización.

Como podemos apreciar, en el sistema de ecuaciones existen dos tipos de valores paramétricos que, aún siendo independientes, son objeto de un cierto control por parte de la organización (como el esfuerzo de marketing) y que recogen la repuesta de los componentes del segmento (como los parámetros de ajuste definidos en el propio modelo).

Aún siendo esencial para la consideración del nivel de estabilidad[8] del modelo la incidencia de las valores paramétricos controlados por la organización, como lo son en este caso las variables de marketing empleadas en el desarrollo de la estrategia de mercado y cuya respuesta a la aplicación de las mismas la hemos recogido en $c\ y(t)$, es con toda seguridad más importante en esa búsqueda de la estabilidad del modelo el papel representado por los parámetros de ajuste del mismo -α, β, k, δ, que ya hemos definido-, que en definitiva reflejan el propio comportamiento del mercado, tanto potencial como actual. Estos parámetros o variables independientes representan la respuesta a las estrategias empleadas por las organizaciones en competencia.

Si estructuramos la matriz Jacobiana del modelo[9], obtendremos los autovalores de la misma λ_1 y λ_2. Según el momento del tiempo en el que estemos estudiando el mercado potencial y actual y la situación del entorno económico, político social, etc. (es decir, los denominados microentorno y macroentorno), esos autovalores se manifestarán de forma diferente en cuanto al valor obtenido. En este sentido, podremos encontrar situaciones de equilibrio distintas, definidas por las soluciones que representan las órbitas[10] y su relación con un punto crítico, tal como:

a) Que algunas de las soluciones orbitales se aproximen o se alejen de un punto crítico y otras evolucionen de manera asintótica a dos líneas imaginarias que se cruzarán en el punto crítico, esto es, que el dinamismo entre mercado potencial y actual de la organización evolucione en el tiempo de manera que se acerque a la solución crítica o se aleje de la misma o, en su caso, que la órbita se manifieste cercana al punto crítico sin identificarse con el mismo. Es lo que se denomina punto de silla. Los autovalores de la matriz Jacobiana serían tales que $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$;

b) que las soluciones orbitales confluyan hacia el punto crítico, esto es, que el mercado potencial y actual de la organización tenga tendencia al equilibrio en una solución o determinado nivel. En este caso haríamos referencia a los denominados nodos estables y los autovalores cumplirían con $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$;

c) si contrariamente a lo establecido en b), ocurre que las soluciones orbitales tienden a alejarse del punto crítico, entonces estamos ante un nodo inestable y los autovalores quedarían como $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$.

8 En términos matemáticos queda expresada en los denominados puntos fijos o de equilibrio. Un ejemplo de punto crítico podría ser que una organización empresarial tenga un mercado actual del 30% de todo el producto-mercado.

9 Todos los desarrollos matemáticos se exponen en el Anexo de este trabajo.

10 Son la proyección de las soluciones dinámicas del sistema. Recordemos que las soluciones del sistema representan el trasvase entre mercado actual y potencial actual de una organización.

Junto a estas maneras diferentes de estabilidad entre mercado potencial y actual de una organización, en el que las órbitas, en general, tienden a acercarse o a alejarse, según el caso de una solución constante o punto crítico, puede ocurrir que la evolución en las trayectorias del mercado potencial y actual conformen otras maneras de equilibrio a través del tiempo. Podemos encontrar, entonces, segmentos de mercado en los que las organizaciones competidoras plantean sus estrategias de tal manera que, partiendo de una situación de equilibrio estable (esto es, de una solución que calificamos de punto crítico del sistema), la evolución temporal del mismo hace que cualquier solución de futuro, recogida en la órbita del conjunto de soluciones, gire alrededor del punto crítico en el sentido de órbitas que se alejan de él en forma de espiral. En este caso la organización está perdiendo liderazgo en el mercado.

Si ocurre el caso contrario, esto es, que se aproximan a este también en forma de espiral, entonces la organización va adquiriendo liderazgo en relación a las competidoras. Puede ocurrir que las soluciones giren en el tiempo alrededor del punto crítico, no en forma de espiral sino circular, en este caso no habría un liderazgo claro en el segmento de mercado. En definitiva el alejamiento en forma de espiral sería el caso de una organización que, partiendo de un determinado posicionamiento en relación a su cuota de mercado actual, está perdiendo a través del tiempo esa cuota en beneficio de sus competidores o de personas que abandonan el segmento de mercado.

En el caso contrario, esto es, el acercamiento en forma de espiral, implicaría el hecho de que, habiendo perdido una organización su cuota de mercado actual, la evolución en el tiempo le lleve a recuperarla o al menos a casi recuperarla. En el caso de que la evolución de la órbita fuera de manera circular alrededor de un punto crítico, todas las organizaciones del segmento tendrían comportamientos competitivos similares desde la perspectiva de los consumidores/compradores a los que se dirigen.

En los tres casos ocurriría que la matriz Jacobiana tendría autovalores complejos ($\lambda = z \pm m\ i$).

Si $z > 0$, entonces estaríamos en el caso de una organización que pierde liderazgo. La órbita se aleja en forma de espiral; es lo que se denomina foco inestable.

Si $z < 0$, la organización adquiere liderazgo paulatinamente. La órbita en espiral tiende a acercarse a la solución constante o punto crítico del sistema.

Si no existe un liderazgo claro en el segmento de mercado, entonces la órbita gira u órbitas son curvas cerradas alrededor del punto crítico. En este caso $z = 0$.

Hemos visto que el sistema dinámico en su trayectoria puede ser estable, entendiendo la estabilidad como un conjunto de posibles soluciones alrededor de una o varias de ellas o puntos críticos. En términos de evolución del mercado potencial y actual de una organización suele darse con frecuencia este estadio de estabilidad. En un marco definido por un entorno dado y por un posicionamiento de las organizaciones, estas compiten moviéndose en torno o alrededor (las soluciones denominadas órbitas) a una determinada cuota de mercado o cuotas de mercado (punto o puntos críticos). Es lo que decimos en términos habituales que una organización tiene el X% de cuota de mercado (punto crítico), o bien, una organización tiene una cuota de mercado que gira alrededor (órbita) de un X% de cuota de mercado (punto crítico).

Mientras ocurra lo que acabamos de expresar, podemos decir, sin lugar a dudas, que en la organización que se trate se producen cambios de tipo cuantitativo, esto es, que existen variaciones en las soluciones que giran alrededor de puntos o soluciones críticas, pero que son estables en el tiempo.

Cambio de comportamiento en la trayectoria del mercado actual y potencial

No obstante lo anterior, la evolución del sistema dinámico puede conducir a que en un determinado momento del tiempo la variación no sea de tipo cuantitativo, sino de tipo cualitativo, esto es, que se manifieste un cambio de tendencia lo suficientemente drástico como para poder pensar que las organizaciones en competencia pueden no representar el mismo rol en el futuro. En este caso y dadas las ecuaciones que hemos definido sobre las variaciones en la trayectoria del mercado potencial y actual de una organización, estamos indicando que esas variaciones que se producen en el tiempo no representan solo un aspecto cuantitativo alrededor de soluciones críticas, sino que se producen variaciones de más calado que la simple contemplación del aspecto cuantitativo.

Las variaciones de tipo cualitativo en el sistema se explican en los cambios del proceso de decisión de los individuos. Las personas de un segmento de mercado que forman parte del mercado actual de una organización, reciben información del entorno y de las organizaciones competidoras. Esa información que es procesada por las variables internas produce una respuesta que puede ser la de adquirir un producto en mayor o menor cantidad o no adquirirlo[11]. Pero puede ocurrir que no se trate de adquirir

[11] Es lo que se manifiesta en variaciones cuantitativas en equilibrio a las que hemos hecho referencia.

en mayor o menor cantidad el producto a una organización, sino que se tomen decisiones en el sentido de buscar a otras organizaciones competidoras para engrosar su número de clientes, o salir del producto-mercado y dejar de ser cliente de cualquier organización en competencia. De igual manera, puede ocurrir que individuos del producto-mercado, que forman parte del mercado potencial de una organización, sometidos al mismo proceso de información, opten por engrosar el mercado actual de la organización que se trate. Esto es lo que podemos calificar como variaciones cualitativas, o cambios de tendencia en la trayectoria del sistema dinámico, o bifurcaciones, o simplemente cambios en la estabilidad.

El estudio de las variaciones cualitativas se manifiesta como hemos indicado en las bifurcaciones del sistema dinámico, esto es, en las bifurcaciones que se producen en la trayectoria de la variación del mercado actual de la organización o del mercado potencial. Para poder estudiarlas, es necesario considerar los parámetros de ajuste que ya hemos definido, parámetros que recogen los aspectos cualitativos del sistema y que lo van ajustando en el devenir del tiempo, de manera que represente de mejor manera la realidad que se quiere modelizar.

Variaciones suaves en el valor de los parámetros de ajuste, producidas por el comportamiento en la toma de decisión de los individuos que integran el segmento de mercado, pueden inducir a que las soluciones del sistema dinámico en el devenir del tiempo cambien en mayor o menor medida. En definitiva, se pueden producir variaciones en $x(t)$ y en $y(t)$, que como hemos definido se complementan. Lo que incrementa o decrementa en $\dot{x}(t)$ supone lo mismo pero en sentido contrario, esto es, en $\dot{y}(t)$.

Analizando la sensibilidad de los parámetros de ajuste en este sistema dinámico[12], observamos que no existe bifurcaciones de Fold para ningún posible valor de los parámetros de ajuste. Sin embargo, del mismo análisis se desprende que sí existen puntos de bifurcación de Hopf.

El parámetro que define la tasa de contacto entre clientes actuales y potenciales α, tiene dos valores de bifurcación, que son aquellos que anulan la ecuación definida por la traza de la matriz Jacobiana A.

$$tr(A) = -c - \delta + k\ \alpha\left(\frac{1}{\beta - \delta} + \frac{\delta}{k\ \alpha - c(\beta - \delta)}\right) \quad (2)$$

Los valores de los parámetros que anulan la traza y el punto de equilibrio correspondiente en cada caso vienen dados por:

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{k\delta}{k\alpha - c(\beta - \delta)}, \frac{k}{\delta - \beta}\right) \quad (3)$$

El valor de ω_0 viene dado por $\sqrt{|A|}$, que en nuestro caso es:

$$\omega_0 = \sqrt{k\ \alpha + c(\beta - \delta)}\ . \quad (4)$$

Resolviendo la ecuación $tr(A) = 0$, tenemos dos valores para el parámetro α

$$\alpha_1 = \frac{c\ k(\beta - \delta) - \sqrt{-c\ k^2(\beta - \delta)^2\ \delta}}{k^2}, \quad (5)$$

$$\alpha_2 = \frac{c\ k(\beta - \delta) + \sqrt{-c\ k^2(\beta - \delta)^2\ \delta}}{k^2}$$

y para cada valor de α^*, tenemos el punto de equilibrio

$$(x(\alpha^*), y(\alpha^*)) = \left(\frac{k\delta}{k\alpha^* - c(\beta - \delta)}, \frac{k}{\delta - \beta}\right) \quad (6)$$

Los valores α_1 y α_2 definen dos nuevos puntos de equilibrio, en el que el sistema dinámico ha cambiado de tendencia. Este se aleja de la trayectoria de equilibrio estable o inestable, según el caso, en la que permanecía en el tiempo, para ir en la búsqueda de otros puntos o soluciones atractivas o repulsivas que representan un cambio cualitativo o de tendencia a medida que varía el parámetro α; a esto se le denomina la continuación del equilibrio, que consiste en la obtención de un nuevo punto de equilibrio al ir variando el parámetro correspondiente, α en este caso, obteniendo una trayectoria del punto de equilibrio en función del parámetro en cuestión. Ese cambio en el punto de equilibrio suele ser una solución del sistema dinámico, esto es, un punto atractivo[13].

A partir de que se produce el cambio cualitativo recogido en la bifurcación de Hopf del sistema, la trayectoria de la tasa de contacto entre clientes actuales y potenciales tiende en el tiempo de manera cíclica a la búsqueda de, en este caso, una solución de equilibrio cíclica estable, convirtiéndose el punto de equilibrio anterior en inestable. Evidentemente, aunque en este sistema dinámico tan solo se produjese el cambio de tendencia para el parámetro α, esto implicaría necesariamente un cambio de tendencia en

12 Véase en el Anexo el soporte matemático sobre bifurcaciones de Fold y Hopf.

13 En algunos casos, la solución estable puede quedar atrapada incluso en un punto superatractivo. Sería el caso en el que la tasa de contacto entre clientes actuales y potenciales permaneciera constante. Lo normal es que la atracción se produzca alrededor de un punto atractivo o solución del sistema. Por ejemplo: la tasa de contacto entre potenciales y actuales está alrededor del X%.

todo el sistema, esto es, un cambio cualitativo en la trayectoria de clientes potenciales y de clientes actuales de la organización que se tratase.

Puede ocurrir otro tipo de bifurcación de Hopf y ello sucede cuando las trayectorias son inestables al punto de equilibrio, al pasar por el punto de bifurcación, siendo el punto de equilibrio estable antes de la bifurcación y la trayectoria cíclica inestable. En este caso antes de la bifurcación las trayectorias tienden hacia una trayectoria cíclica estable (Kuznetsov, 1998).

El parámetro α que define la tasa de contacto entre clientes actuales y potenciales de la organización ha dejado su atractor para tomar valores que lo estabilizan alrededor de una trayectoria cíclica o viceversa, según sea la bifurcación de Hopf supercrítica o subcrítica. Ese cambio en la trayectoria del parámetro nos permite conocer un cambio cualitativo en las relaciones entre clientes actuales y potenciales y, en la medida que el cambio del parámetro influye en el sistema que estamos estudiando, permite, a su vez, prever trayectorias nuevas del mercado potencial y actual de la organización.

El impacto del resto de los parámetros de ajuste incide formalmente de la misma manera que lo hace este parámetro α, esto es, se pueden producir variaciones cualitativas de cada uno de los demás parámetros, que a su vez permitirán estudiar las nuevas trayectorias del sistema; en definitiva, variaciones cualitativas de los parámetros de ajuste del sistema, que son variables independientes, no controladas por la organización, sino provenientes del comportamiento de los consumidores y de la actuación de las variables de marketing.

Analizando la sensibilidad de los demás parámetros de ajuste de este sistema dinámico, de la misma manera que lo hemos realizado con el parámetro α, tenemos que para el parámetro β, los valores obtenidos al resolver la ecuación $tr(A)=0$ son números complejos, lo que indica que, al no ser valores reales, no se produce un cambio cualitativo de tendencia en este parámetro. La entrada de individuos al mercado potencial de la organización, atraídos por el mercado actual de otras organizaciones competidoras, va a seguir produciéndose alrededor del mismo tipo de solución que se mantiene en el tiempo.

El parámetro c tiene un comportamiento similar al parámetro α. Al igual que para este parámetro se puede entender el porqué una organización con cuotas de mercado estables dentro de un segmento de mercado puede entrar en una dinámica de alternancia en la que, en determinados momentos de tiempo de mayor o menor duración, su cuota de mercado está alrededor de una solución y, en otros momentos del tiempo y de manera cíclica, su cuota de mercado está alrededor de otra solución diferente de la anterior, similar a las bifurcaciones de la conocida teoría de los ciclos económicos. Para este parámetro tenemos los siguientes valores de bifurcación de Hopf:

$$c_1=\frac{A+\sqrt{B}}{2(\beta-\delta)};\ c_2=\frac{A-\sqrt{B}}{2(\beta-\delta)},\tag{7}$$

donde $A=-(2k\alpha(\beta-\delta)-\beta^2\delta+\delta^2(2\beta-1))$ y

$B=(\beta-\delta)^2\,\delta(-4k\alpha+(\beta-\delta)\delta)$

y para cada valor del parámetro c^*, tenemos el punto de equilibrio:

$$(x(c^*),y(c^*))=\left(\frac{k\delta}{k\alpha-c^*(\beta-\delta)},\frac{k}{\delta-\beta}\right)\tag{8}$$

En relación al parámetro δ, que representa la tasa de salida al mercado potencial por diferentes causas, bien por desaparición natural de los individuos, bien porque pasen a formar parte del mercado actual de organizaciones competidoras, tiene un valor real que anula la traza de la matriz Jacobiana.

$$\delta=\frac{-c^2+2c\beta}{3c}+\frac{A}{3c\sqrt[3]{B+3\sqrt{3}\sqrt{C}}}+\frac{\sqrt[3]{B+3\sqrt{3}\sqrt{C}}}{3\sqrt[3]{2}c},\tag{9}$$

donde:

$A=\sqrt[3]{2}(-c^4+6c^2k\ \alpha-2c^3\ \beta-c^2\ \beta^2),$

$B=2c^6-18c^4k\,\alpha+27c^2k^2\,\alpha^2+\ 6c^5\,\beta-18c^3k\,\alpha\,\beta$
$+6c^4\beta^2+\ 2c^3\beta^3,$

$C=-\ 4c^6k^3\alpha^3+27c^4k^4\,\alpha^4+4c^7k^2\,\alpha^2\beta-36c^5k^3\alpha^3\beta$
$+\ 8c^6k^2\,\alpha^2\,\beta^2+\ 4c^5\,k^2\,\alpha^2\beta^{\,3}$

y para cada valor del parámetro δ^*, tenemos el punto de equilibrio:

$$(x(\delta^*),y(\delta^*))=\left(\frac{k\delta^*}{k\alpha-c(\beta-\delta^*)},\frac{k}{\delta^*-\beta}\right)\tag{10}$$

Si consideramos el parámetro que expresa el ingreso de individuos en el mercado potencial k, podemos observar que también existen dos valores que anulan la traza de la matriz Jacobiana, cumpliéndose el resto de las condiciones para entender que existe una bifurcación de Hopf.

$$k_1 = \frac{c\alpha(\beta-\delta)-\sqrt{-c\alpha^2(\beta-\delta)^2\delta}}{\alpha^2},$$
$$k_2 = \frac{c\alpha(\beta-\delta)+\sqrt{-c\alpha^2(\beta-\delta)^2\delta}}{\alpha^2}, \tag{11}$$

y para cada valor del parámetro k^*, tenemos el punto de equilibrio:

$$(x(k^*), y(k^*)) = \left(\frac{k^*\delta}{k^*\alpha - c(\beta-\delta)}, \frac{k^*}{\delta-\beta}\right). \tag{12}$$

Por tanto, este parámetro aporta al sistema un cambio cualitativo similar a los de los parámetros α y c. En definitiva tenemos el siguiente resultado:

Proposición

a) Se obtiene una bifurcación de Hopf en el punto de equilibrio $\left(\frac{k\delta}{\omega^2(\alpha_2)}, \frac{k}{\delta-\beta}\right)$, en el valor de bifurcación

$$\alpha_2 = \frac{c\,k(\beta-\delta)+\sqrt{-c\,k^2(\beta-\delta)^2\,\delta}}{k^2}.$$

b) Se obtiene una bifurcación de Hopf en los puntos de equilibrio $(x(c^*), y(c^*)) = \left(\frac{k\delta}{k\alpha - c^*(\beta-\delta)}, \frac{k}{\delta-\beta}\right)$, en los valores de bifurcación $c_1 = \frac{A+\sqrt{B}}{2(\beta-\delta)}$; $c_2 = \frac{A-\sqrt{B}}{2(\beta-\delta)}$,

donde $A = -(2k\alpha(\beta-\delta) - \beta^2\delta + \delta^2(2\beta-1))$ y

$B = (\beta-\delta)^2\,\delta(-4k\alpha + (\beta-\delta)\delta)$.

c) Se obtiene una bifurcación de Hopf en el punto de equilibrio $(x(\delta^*), y(\delta^*)) = \left(\frac{k\delta^*}{k\alpha - c(\beta-\delta^*)}, \frac{k}{\delta^*-\beta}\right)$, en el valor de paramétrico de bifurcación

$$\delta = \frac{-c^2+2c\beta}{3c} + \frac{A}{3c\sqrt[3]{B+3\sqrt{3}\sqrt{C}}} + \frac{\sqrt[3]{B+3\sqrt{3}\sqrt{C}}}{3\sqrt[3]{2}c},$$

donde, en este caso:

$$A = \sqrt[3]{2}(-c^4 + 6c^2k\ \alpha - 2c^3\ \beta - c^2\ \beta^2),$$
$$B = 2c^6 - 18c^4k\alpha + 27c^2k^2\alpha^2 + 6c^5\beta - 18c^3k\alpha\beta + 6c^4\beta^2 + 2c^3\beta^3,$$
$$C = -4c^6k^3\alpha^3 + 27c^4k^4\alpha^4 + 4c^7k^2\alpha^2\beta - 36c^5k^3\alpha^3\beta + 8c^6k^2\alpha^2\beta^2 + 4c^5k^2\alpha^2\beta^3.$$

d) Se obtiene una bifurcación de Hopf en el punto de equilibrio $(x(k^*), y(k^*)) = \left(\frac{k^*\delta}{k^*\alpha - c(\beta-\delta)}, \frac{k^*}{\delta-\beta}\right)$, en el valor de bifurcación

$$k_2 = \frac{c\alpha(\beta-\delta)+\sqrt{-c\alpha^2(\beta-\delta)^2\delta}}{\alpha^2}$$

En realidad la contribución de la variación en el valor de todos los parámetros que hemos definido, al sistema que estamos estudiando, explica las oscilaciones a modos de ciclo de las cuotas de mercado de cualquier organización.

Variaciones en los parámetros recogen las variaciones en el pensamiento de los individuos de un segmento de mercado en su proceso de decisión de compra y los efectos de las decisiones tácticas y, en su caso, estratégicas de los responsables de la organización en relación al esfuerzo de marketing que se realiza. Ello conlleva movimientos entre el mercado actual de una organización y el mercado potencial actual, con la repercusión en el potencial teórico de la misma.

Con el estudio del análisis de la sensibilidad y de las bifurcaciones de los parámetros, se puede prever qué valores de los mismos hacen que el modelo sea de una manera o de otra, en el sentido de en dónde queda atrapado el modelo o en su caso repelido o inestable, aspectos de índole cualitativo. La importancia de ello radica en que, dado que el modelo refleja la realidad que queremos estudiar, estamos a su vez previendo cómo va a tender la realidad estudiada, esto es, qué cambios de tendencia se prevén puedan ocurrir en el mercado potencial y actual de una organización. La respuesta a este interrogante viene determinada por el análisis y estudio, en el sentido de qué es lo que puede pasar a partir de que el sistema se ha estabilizado en un punto crítico del que ha surgido una bifurcación o cambio de tendencia cualitativo.

Bifurcaciones supercríticas y subcríticas

¿Qué es lo que ocurre a partir del valor crítico de un parámetro en el que se produce una bifurcación de Hopf en el sistema? Cuando el parámetro estudiado tiene una solución a partir de la cual se produce ese tipo de bifurcación, es necesario saber si la misma es supercrítica o subcrítica. Será supercrítica si a partir del valor de la bifurcación en el que el sistema es estable, el punto de equilibrio se torna inestable, dando origen a una curva cerrada estable que contiene el punto de equilibrio que se ha convertido en inestable.

En definitiva el punto fijo o crítico del sistema, en el que permanecía atrapado, se bifurca en un ciclo límite, que gira alrededor de una solución inestable. Será subcrítica si el sistema pasa de un ciclo límite inestable a un punto de equilibrio estable a partir del valor del parámetro en el que se produce la bifurcación. Podemos decir que el ciclo límite inestable se colapsa en un punto fijo.

Es importante conocer el tipo de bifurcación, porque de esa manera sabremos o podremos prever si el mercado potencial actual y el mercado actual que son los elementos que conforman el sistema estudiado, esto es, el mercado, tienen tendencia a estabilizarse en una solución estable (subcrítica) o en una solución de ciclo límite estable que gira alrededor de una solución inestable (supercrítica), lo que indicaría soluciones periódicas estables a lo largo de la trayectoria del sistema, girando alrededor de una solución inestable (bifurcación supercrítica); o bien la tendencia a quedar atrapado en una sola solución estable (bifurcación subcrítica).

Para cada parámetro debemos encontrar la continuación de la trayectoria a partir de la bifurcación. Ello nos conducirá a bifurcaciones de codimensión 2, según el caso, con lo que el estudio de la trayectoria prácticamente concluirá salvo para aquellos sistemas en los que se manifiesten las condiciones necesarias para conocer si los mismos pueden llegar a quedar atrapados en un atractor de tipo caótico.

Dado que, desde una perspectiva de conjunto de lo que podemos denominar paquete investigador sería muy extenso para un solo trabajo, el resto del estudio de todos y cada uno de los parámetros del sistema, salvo del parámetro α, los vamos a incluir en un posterior trabajo de investigación, entre otras razones porque al enlazar con las bifurcaciones de codimensión 2, estas tienen suficiente entidad y autonomía para ser tratadas de manera más adecuada. No obstante y a modo de enlace entre los dos trabajos, creemos conveniente iniciar, tal y como hemos expresado en el párrafo anterior, el estudio del parámetro α, de manera que permita introducirnos en la continuación de la trayectoria dinámica del sistema que estamos trabajando.

¿Qué ocurre con la tasa de contacto entre clientes potenciales y actuales representada en el sistema de mercado por el parámetro α? Si el sistema ha llegado a un punto o solución a partir del cual se produce un cambio cualitativo en el mismo, esto es, una bifurcación, tal y como hemos expresado en párrafos anteriores de este mismo epígrafe es conveniente saber qué tendencia es la que va a continuar o, lo que es lo mismo, qué tipo de bifurcación se va a producir: subcrítica o supercrítica. La respuesta la podemos obtener utilizando los coeficientes de Lyapunov.

Si el valor de la bifurcación viene representado por α_0, el punto de equilibrio para este valor es:

$$(x^*(\alpha_0), y^*(\alpha_0)) = \left(\frac{k\delta}{\omega^2(\alpha_0)}, \frac{k}{\delta-\beta} \right) \tag{13}$$

donde

$$\omega^2_{\alpha_0} = \frac{-k^2\beta^2\delta + k^2\delta^2\beta - k^2\delta^3}{2k^2(\beta-\delta)} + \frac{\sqrt{-k^4(8c-\delta)(\beta-\delta)^4\,\delta}}{2k^2(\beta-\delta)}, \tag{14}$$

la matriz Jacobiana, particularizada en el valor de bifurcación α_0 es:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\omega^2(\alpha_0)}{\beta-\delta} & \frac{\omega^2(\alpha_0)}{\beta-\delta} + \beta - \delta \\ -\frac{\omega^2(\alpha_0)}{\beta-\delta} & -\frac{\omega^2(\alpha_0)}{\beta-\delta} \end{pmatrix} \tag{15}$$

Los autovalores de la matriz Jacobiana son $\lambda_{1,2} = \pm\, i\omega$, y los vectores que cumplen con el sistema de ecuaciones $Aq = i\,\omega\, q$, $A^T p = -i\,\omega\, p$, $\langle \mathrm{Re}(q), \mathrm{Im}(p) \rangle = 0$, $\langle p, q \rangle = 1$ vienen determinados por:

$$p = \begin{pmatrix} -\frac{i\omega}{2\varepsilon} \\ \frac{\varepsilon - i\omega}{2\varepsilon} \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} -1 - \frac{i\omega}{\varepsilon} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Realizando un cambio en el origen de coordenadas

$x = \xi_1 + x^*(\alpha_0)$,

$y = \xi_2 + y^*(\alpha_0)$

tenemos que el sistema queda en la forma:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= k + \beta\left(\frac{k}{-\beta+\delta} + \xi_2\right) - c\left(\xi_1 + \frac{k\delta}{\omega^2}\right) - \alpha\left(\frac{k}{-\beta+\delta} + \xi_2\right)^2\left(\xi_1 + \frac{k\delta}{\omega^2}\right) \\ \dot{\xi}_2 &= -\delta\left(\frac{k}{-\beta+\delta} + \xi_2\right) + c\left(\xi_1 + \frac{k\delta}{\omega^2}\right) + \alpha\left(\frac{k}{-\beta+\delta} + \xi_2\right)^2\left(\xi_1 + \frac{k\delta}{\omega^2}\right) \end{aligned} \tag{16}$$

Se construye una forma bilineal particularizada en el punto de bifurcación α_0 (ver Anexo):

$$B(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{(c(\beta-\delta)+\omega^2)\,(x_1y_2 + x_2y_1)}{k\omega^2} \\ \frac{(c(\beta-\delta)+\omega^2)\,(x_1y_2 + x_2y_1)}{k\omega^2} \end{pmatrix} \tag{17}$$

De igual manera, se construye la forma trilineal particularizada en el punto de bifurcación α_0 (ver Anexo):

$$C(x,y,u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{18}$$

El primer coeficiente de Lyapunov construido a partir de las formas bilineal y trilineal $\ell_1(\alpha_0)$ nos indica si la bifurcación es supercrítica ($\ell_1 < 0$) o subcrítica ($\ell_1 > 0$) (Kuznetsov, 1998).

En una bifurcación supercrítica antes del valor crítico de bifurcación del parámetro en un entorno de él, el comportamiento del sistema es un punto de equilibrio estable, se mantiene para el valor de bifurcación. Pero a partir del valor crítico, el punto de equilibrio se hace inestable y a su vez nace una curva cerrada que es estable y que contiene en su interior al punto de equilibrio. Dicha curva cerrada es, para cada valor del parámetro, un ciclo límite. Al contrario, en una bifurcación de Hopf subcrítica, antes del valor de bifurcación existe un ciclo límite inestable y un punto de equilibrio en su interior que es estable y, al pasar por el valor crítico, desaparece el ciclo pasando el punto de equilibrio a ser estable.

El valor del coeficiente de Lyapunov ℓ_1 es (ver Anexo):

$$\ell_1(\alpha) = -\frac{\alpha^2(\beta-\delta)}{2\omega^3}, \tag{19}$$

que, al particularizarlo en el valor de α_0 , nos da:

$$\ell_1(\alpha_0) = -\frac{(\beta-\delta)\left(c(\beta-\delta)+\omega^2\right)^2}{2k^2\omega^3}. \tag{20}$$

Dependiendo del valor de los parámetros, habrá regiones en las que la bifurcación de Hopf sea supercrítica o subcrítica, es decir se tiene el siguiente resultado.

Teorema

Existe una bifurcación de Hopf en el punto de equilibrio $\left(\frac{k\delta}{\omega^2(\alpha_0)}, \frac{k}{\delta-\beta}\right)$, dependiente del valor de bifurcación α_0. Obtenemos una partición del espacio paramétrico, condicionado a que el primer coeficiente de Lyapunov $\ell_1(\alpha_0)$ sea mayor o menor que cero. Para la región en la que $\ell_1(\alpha_0)$ sea mayor que cero, la bifurcación es supercrítica y, en caso contrario, es subcrítica.

La tasa de contacto entre clientes actuales y potenciales tiene un valor en un determinado momento del tiempo en el que transcurre la trayectoria, si el valor es el que hemos denominado como α_0 , entonces al aplicar el primer coeficiente de Lyapunov para dicho valor y ser positivo podemos asegurar que estamos ante una bifurcación supercrítica. Ello nos indica que la contribución del parámetro estudiado, en este caso α, al sistema mercado es que este último (el sistema) va a tener una tendencia, insistimos en lo que contribuye el parámetro, que pasa de la estabilidad a la inestabilidad; el punto de equilibrio se va a volver inestable con unas soluciones alrededor de él de carácter estable y cíclicas. Por tanto, el sistema va a estar rodeado de estabilidad, aunque el equilibrio sea inestable.

Si aplicando el primer coeficiente de Lyapunov para α_0, este resulta negativo, nos encontramos ante una bifurcación subcrítica o, lo que es lo mismo, la contribución del parámetro α al sistema mercado hace que este se estabilice en una solución fija, el sistema se colapsa y queda atrapado.

Conclusiones

El estudio del modelo dinámico continuo del mercado actual de una organización frente al mercado potencial actual y teórico de la misma, que constituyen lo que hemos denominado sistema de mercado, permite a través del valor de los parámetros de ajuste, que son variables independientes y exógenas, conocer la tendencia del mercado, no solo desde una óptica cuantitativa, sino desde una perspectiva de cambio de tendencia o cualitativa. Poder prever si el mercado entra en situación de equilibrio estable o lo contrario, y si ese equilibrio estable lo es alrededor de una solución o de un conjunto de soluciones periódicas, permite gestionar la organización empresarial de una manera más racional. El estudio de las bifurcaciones de Hopf supercríticas y subcríticas para el resto de los parámetros, que hemos indicado en párrafos anteriores, así como el estudio de las bifurcaciones de codimensión 2, lo desarrollaremos en un posterior trabajo.

Con modelos de este tipo que entienden de la relación entre mercados potenciales y actuales de una organización, el gestor empresarial puede llegar a prever con cierta anticipación cuáles pueden ser los cambios que se producen en el comportamiento de acción de sus clientes.

Los clientes actuales de una organización, afectados por variables internas del sistema de mercado, como las derivadas de la acción directa de la misma para con ellos y las variables de acción del entorno, modifican su comportamiento, que en el mejor de los casos induce a variaciones en su comportamiento de compra y, en el peor de los casos, a dejar de ser clientes actuales de esa organización para pasar a ser clientes de otra y constituir, para la primera, parte del mercado potencial de clientes.

En este artículo se ha estudiado cómo ese cambio de comportamiento previsible desde la variación dinámica propuesta es factible racionalizarlo y tomar medidas de empresa que reconduzcan, en su caso, la variación del comportamiento del cliente actual de la organización.

El artículo plantea un modelo teórico y su metodología de resolución aplicable, todo ello a la gestión empresarial, desde el momento que en cualquier organización se desarrolle el modelo de comportamiento de sus clientes actuales y potenciales. Cada organización por sus circunstancias tiene respuesta del mercado diferente. Lo que se resalta de este artículo es que, identificando en cada caso el modelo correspondiente, se está dotando de una metodología de análisis, empleando instrumentos matemáticos y estadísticos.

Referencias bibliográficas

Armstrong, G., Kotler, P., Merino, M.J., Pintado, T., & Juan, J.M. (2011). *Introducción al Marketing*. Madrid: Pearson.

Bosi, S., Magris, F., & Venditti, A. (2005). Competitive equilibrium cycles with endogenous labor. *Journal of Mathematical Economics, 41*(3), 325-349.

Feichtinger, G. (1992). Hopf Bifurcation in an Advertising Diffusion Model. *Journal of Economic Behavior and Organization, 17*, 401-411.

Gandolfo, G. (1997). *Economic Dynamics.* Nueva York: Springer-Verlag.

Gukenheimer, J., & Holmes, P. (1983). Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. Nueva York: Springer-Verlag.

Haunschmied, J.L., Feichtinger, G., Hartl, R.F., & Kort, P.M. (2005). Keeping up with the technology pace: A DNS-curve and a limit cycle in a technology investment decision problem. *Journal of Economic Behavior and Organization, 57*(4), 509-529.

He, X.Z., & Westerhoff, F.H. (2005). Commodity markets, price limiters and speculative price dynamics. *Journal of Economic Dynamics & Control, 29*(9), 1577-1596.

Kotler, P. (1992). *Dirección de Marketing. Análisis, Planificación, Gestión y Control.* Nueva York, Prentice Hall.

Kuznetsov, Y.A. (1998). *Elements of Applied Bifurcation Theory. Applied Mathematical Sciences.* Nueva York: Springer-Verlag.

Landa, F.J., & Velasco, F. (2004). Análisis Dinámico del Mercado Actual y Potencial de las Organizaciones. *Revista Europea de Dirección y Economía de la Empresa, 13*(1), 131-140.

Li, M.Q. (2005). The rise of China and the Demise of the capitalist world-economy: exploring historical possibilities in the 21st century. *Science & Society, 69*(3), 420-448.

Lorenz, H.W. (1997). *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion.* Nueva York: Springer-Verlag.

Magnitskii, N.A., & Siderov, S.V. (2006). *New Methods for Chaotic Dynamics.* Nonlinear Science, Series A, Vol. 58, World Scientific.

Velasco, F., Begines, F., Nadal, M.P., Chamizo, C., & Vilchez, M.L. (2002). Continuación de los Equilibrios de un Sistema Dinámico Económico con Bifurcaciones de Codimensión 1 y 2. *Computación y Sistemas. Revista Iberoamericana de Computación*, *5*(3), 169-179.

Velasco, F., Nadal, M.P., González, L., & Vílchez, M.L. (2007). Estudio de la Estabilidad y de las Bifurcaciones de los Equilibrios de un Sistema Dinámico. Aplicación al Mercado Cervecero Español. *Estudios de Economía Aplicada*, *25*(1), 419-452.

Velasco, F., Nadal, M.P., González-Abril, L., & Ortega, J.A. (2009). Bifurcaciones de codimensión 2 en un modelo dinámico del mercado potencial y actual: Aplicación al mercado cervecero español. *Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa, 7*, 77-94.

Vílchez, M.L., Velasco, F., & García del Hoyo, J.J. (2002). Bifurcaciones Transcríticas y Ciclos Límite en un Modelo Dinámico de Competición entre Dos Especies. Una Aplicación a la Pesquería de Engrualis Encrasicholus de la Región Suratlántica Española. *Estudios de Economía Aplicada, 20*(3), 651-677.

Vílchez, M.L., Velasco, F., González, L., & Ortega, J.A. (2003). Bifurcaciones de Hopf: Análisis Cualitativo y Aplicación a un Modelo Bioeconómico de Pesquerías. *Computación y Sistemas. Revista Iberoamericana de Computación*, *6*(4), 273-283.

Vílchez, M.L., Velasco, F., & Herrero, I.A. (2004). An Optimal Control Problem With Hopf Bifurcations an Application to the Striped Venus Fishery in the Gulf of Cadiz. *Fisheries Research, 67*(3), 295-306.

Wagener, F. (2005). Structural analysis of optimal investment for firms with non-concave revenue. *Journal of Economic Behavior & Organization*, *57*(4), 474-489.

Wiggins, S. (2003). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Nueva York: Springer-Verlag.

Zhang, W.B. (2006). *Dyscrete Dynamical Systems, Bifurcations and Chaos in Economics.* Mathematics in Science and Engineering Vol. 204, Series Editor: C.K. Chui. Elsevier.

Anexo

Puntos de equilibrio y estabilidad del modelo

El punto de equilibrio (punto fijo o punto singular) de un sistema dinámico no lineal general $\dot{x} = F(x,\theta)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\theta \in \mathbb{R}^m$, donde $(x,\theta) \in \mathbb{R}^{n+m}$ representan las variables y los parámetros del modelo, se obtiene (Kuznetsov, 1998; Wiggins, 2003) al resolver el sistema $F(x,\theta) = \Theta$, donde Θ es el vector nulo.

La estabilidad del sistema $\dot{x} = F(x,\theta)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\theta \in \mathbb{R}^m$ se hace al estudiar los autovalores de la matriz Jacobiana $J = \frac{\partial F}{\partial x}(x^*(\theta))$ del sistema, donde $x^*(\theta)$ es el punto de equilibrio.

Los autovalores de la matriz A vienen dados por $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(tr(A) \pm \sqrt{D})$ (ver por ejemplo Magnitskii y Siderov, 2006), donde $D = (tr(A))^2 - 4\det(A)$. Notemos que si $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$, entonces el punto de equilibrio es estable, y si hay algún autovalor con parte real positiva $\mathrm{Re}(\lambda\ ) > 0$, entonces el punto de equilibrio es inestable.

Al estudiar la estabilidad del punto de equilibrio en el espacio paramétrico $(\alpha,\beta,\delta,c,k) \in \mathbb{R}^5$, nos debemos de cuestionar si existen conjuntos en dicho espacio que describan cada punto de equilibrio expuesto anteriormente. Así, por ejemplo, para que exista un nodo inestable, ha de ocurrir que $D > 0$, $det(A) > 0$, $tr(A) > C$. La región definida en el espacio paramétrico, para este caso, no es vacía. Análogamente sucede con cada uno de los puntos de equilibrio.

Bifurcaciones de codimensión 1

En los sistemas dinámicos continuos hay dos bifurcaciones genéricas de codimensión 1, que pueden ser detectados a lo largo de la curva de equilibrio: las bifurcaciones Fold y las Hopf.

En la bifurcación Fold, si tenemos un parámetro α activado, la matriz Jacobiana particularizada en el punto de equilibrio tiene un autovalor nulo. Entonces, por el teorema de la variedad centro (Gukenheimer y Holmes, 1983), el sistema $\dot{x} = F(x,\alpha)$, $x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}$ es equivalente a una ecuación de la forma:

$$\dot{u} = au^2 + O(u^3,$$

donde: $a =< p, B(q,q) >$,

$$Aq = \theta, A^T p = \theta, < q,q >= 1, < p,q >= 1,$$

$$B_i(q,p) = \sum_{j,k=1}^{n} \left. \frac{\partial^2 f(x,\alpha_0)}{\partial x_j \partial x_k} \right|_{x=x_0} q_j p_k;$$

$i = 1,2,...,n$

Si $a \neq 0$, entonces el sistema es topológicamente equivalente, localmente, al sistema:

$$\begin{cases} \dot{u} = \alpha + \sigma u^2 \\ \dot{v} = -v \end{cases} \qquad \text{(Kuznetsov, 1998),}$$

en el caso en que el segundo autovalor sea negativo. Genéricamente dos equilibrios (un nodo estable y un punto silla) colisionan y desaparecen en el valor crítico del parámetro en cuestión.

En nuestro caso particular, tenemos únicamente un punto de equilibrio (x^*, y^*), con lo que no es posible una bifurcación Fold.

Análogamente, en la bifurcación Hopf, si tenemos un parámetro α activado, las condiciones que debe de cumplir la matriz Jacobiana $A(\alpha)$, particularizada en el punto de equilibrio, A, son:

$$\begin{cases} \sigma(0) = 0, \Delta(0) = \omega_0^2 > 0,\ \sigma(\alpha) = tr(A(\alpha)), \\ \Delta(\alpha) = \det(A(\alpha)),\ \omega(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{4\Delta(\alpha) - \sigma^2(\alpha)}, \\ \omega(0) = \omega_0 \end{cases}$$

y $\lambda_{1,2}(\alpha) = \mu(\alpha) \pm i\ \omega(\alpha)$ son los autovalores de la matriz $A(\alpha)$ (Kuznetsov, 1998) con $\mu(\alpha) = \frac{1}{2}\sigma(\alpha)$.

Las condiciones de no degeneración vienen dadas por $\mu\ '(0) \neq 0$ y $\ell_1(0) \neq 0$, donde $\ell_1(0) = \frac{1}{2\omega^2}\mathrm{Re}(i\ g_{20}g_{11} + \omega\ g_{21})$ es el primer coeficiente de lyapunov, y además $g_{20} =< p, B(q,q) >$, $g_{11} =< p, B(q,\bar{q}) >$, $g_{21} =< p, C(q,q,\bar{q}) >$, siendo $B(x,y)$ y $C(x,y,z)$ formas multilineales simétricas, donde:

$$B_i(x,y) = \sum_{j,k=1}^{n} \left. \frac{\partial^2 F_i(\xi,0)}{\partial \xi_j\ \partial \xi_k} \right|_{\xi=\xi_0} x_j y_k;\ i = 1,2\ ,$$

$$C_i(x,y,u) = \sum_{j,k,l=1}^{n} \left. \frac{\partial^3 F_i(\xi,0)}{\partial \xi_j\ \partial \xi_k\ \partial \xi_l} \right|_{\xi=\xi_0} x_j y_k u_l,\ \ i = 1,2\ .$$

Además, se han de obtener dos vectores p,q que han de cumplir las siguientes condiciones:

$$Aq = i\omega\ q, A^T p = -i\omega\ p, < \mathrm{Re}(q),\ \mathrm{Im}(p) >= 0, < q,p >= 1$$

MARKETING
Teoría del
Dinamismo